Sesión preparatoria Olimpiada Local 2017-18

(Grupo 2. ENUNCIADOS)

Sevilla, 1 de diciembre de 20167

1.- Probar que para todo entero positivo *n*,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

2.- Determinar para qué valores de $n\in N$ es verdadera la desigualdad $2^n > n^2 + 4n + 5$

3.- Sea a_n la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8,…, a_n, donde, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, n>1

a) Probar que para todo n, $a_n < 2^n$.

b) (NO) Probar que el término general se expresa: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

4.- (NO) Probar que no existe una función entera: *f: Z ---> Z* tal que $f(x + f(y)) = f(x) - y$ para cualesquiera enteros *x*, *y*

5.- La torre de Hanoi. Definir una función recurrente que nos de los movimientos de los discos. Finalmente, mediante conjetura expresar dicha función de manera explícita, y probar que es correcta utilizando el principio de inducción.

6.- (NO) En un torneo cada jugador juega con cada uno de los otros jugadores exactamente una vez, y en cada juego hay un ganador y un perdedor.
Decimos que los jugadores $p_1, p_2 \ldots , p_m$ forman un ciclo de longitud *m* si p_1 le gana a p_2, p_2 le gana a $p_3, \ldots, p_{m-1}$ le gana a p_m, y p_m le gana a p_1.
Demostrar que si hay un ciclo $p_1, p_2, \ldots , p_m$ ($m \geq 3$), entonces hay un ciclo de longitud

7.- Si *a*, *b*, *c* son enteros tales que $a^6 +2b^6 = 4c^6$, demuéstrese que $a = b = c = 0$.
----------------------------------- **Añadidos por Naranjo y Perera:**

8.- Probar que para todo natural $n > 1$ se verifica que:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

9.- Probar que para todo natural n, $3^n \geq n^3$

10.- En la sucesión de Fibonacci, probar que se verifica que $a_{2n+1} = a_{n+1}^2 + a_n^2$, para todo $n \geq 2$.

11.- Demostrar que dados n^2 enteros positivos podemos colocarlos en un tablero $n\times n$ de tal forma que toda fila y toda columna tengan suma distinta.

12.- Dado un tablero $2^n \times 2^n$, con $n \geq 1$ y al que le quitamos una esquina, demostrar que se puede cubrir con piezas formadas por tres cuadraditos en forma de L.

NO: no hechos en esta sesión.